22 ottobre 2005 B

Prima prova parziale di Matematica e di Istituzioni di Matematiche

per LT in Biotecnologie e LT in Scienze e Tec. per i Beni Culturali

(1) Siano X_0, X insiemi con $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.

a) Si verifichi che per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ risulta $(X_0 \cup A) \smallsetminus (X_0 \smallsetminus A) = A$.

b) Si consideri l'applicazione $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ definita ponendo, per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$, $f(A) = (X_0 \cup A, X_0 \smallsetminus A)$. È vero che f è iniettiva? È suriettiva?

c) Si definisca esplicitamente una applicazione $g : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}$.

(2) Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, risulta

$$5^{n-2} > n^2.$$

(3) Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\ln(1-x)\,(e^{x^2+5x+6} - 1)\cos^2 x > 0.$$

(4) Si consideri la funzione reale di variabile reale $y = f(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right) + x$.

a) Si determini il dominio di f.

b) E' possibile prolungare f per continuità?

c) Si determinino, se esistono, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Si concluda che f si annulla in almeno un punto $x_0 > 0$.

(5) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla posizione

$$x \mapsto \begin{cases} \cos x & x \leq \pi \\ x^2 + ax + b & x > \pi \end{cases}.$$

a) Per quali a, b l'applicazione f risulta continua su tutto $\mathbb{R}$?

b) Per quali a, b l'applicazione f risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$?